

**OLIMPIADA LA FIZICĂ**  
*etapa raională/municipală/zonală*  
**19 februarie 2023**

**Clasa a 12**

**PROBLEMA 1**

**(10,0 p)**

**P1.** Un corp mic este lăsat liber de la vârful unui plan înclinat, astfel că acesta lunecă până la baza planului în  $t = 0,30\text{ s}$ . Planul înclinat are lungimea  $l = 0,10\text{ m}$  și unghiul la bază  $\alpha = 30^\circ$ . (0,6p)

**P1.1.** Reprezentați toate forțele care acționează asupra corpului în mișcarea acestuia pe plan

**P1.2.** Argumentați dacă asupra corpului acționează forță de frecare, determinați, dacă este cazul, valoarea coeficientului de frecare  $\mu$ . (3,6p)

**P1.3.** Planul înclinat, cu corpul la baza acestuia, începe să se miște cu o accelerăție orizontală. Determinați care trebuie să fie accelerăția minimă  $A$  a planului înclinat, pentru a pune corpul în mișcare, de-a lungul planului în sus? Coeficientul de frecare static se va considera egal cu coeficientul de frecare dinamic. (2,8p)

**P1.4.** Cum trebuie să fie orientată accelerăția planului înclinat  $\vec{A}$  față de orizontală pentru ca accelerăția corpului de-a lungul planului înclinat în sus să fie maximă? Determinați unghiul  $\beta$  dintre vectorul accelerăției  $\vec{A}$  și direcția orizontală, considerând mișcarea corpului de-a lungul planului înclinat. (3,0p)

Accelerăția căderii libere este  $g = 10\text{ ms}^{-2}$ ,  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\cos 30^\circ = 0,866$ .

**ЗАДАЧА 1**

**(10,0 p)**

**P1.** Небольшое тело, свободно лежащее на краю некоторой наклонной плоскости, соскальзывает с нее к основанию за время  $t = 0,30\text{ s}$ . Длина наклонной плоскости  $l = 0,30\text{ m}$ , угол наклона к горизонту  $\alpha = 30^\circ$ .

**P1.1.** Представьте все силы, действующие на тело во время его движения по наклонной плоскости. (0,6p)

**P1.2.** Аргументируйте, действует ли сила трения на тело, если да – определите коэффициент трения  $\mu$ . (3,6p)

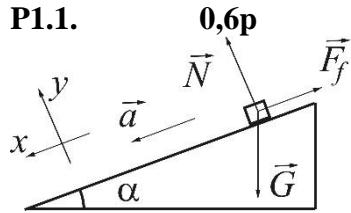
**P1.3.** Наклонная плоскость вместе с телом, находящимся в ее основании, начинает двигаться с горизонтальным ускорением. Определите, каково должно быть минимальное ускорение  $A$  наклонной плоскости, чтобы тело начало перемещаться вверх вдоль плоскости. Коэффициент трения покоя принимается равным коэффициенту трения скольжения. (2,8p)

**P1.4.** Как должно быть направлено ускорение наклонной плоскости  $\vec{A}$  относительно горизонта, чтобы ускорение тела вдоль наклонной плоскости вверх было максимальным? Определите угол  $\beta$  между вектором ускорения  $\vec{A}$  и горизонтальным направлением, рассматривая движение тела вдоль наклонной плоскости. (3,0p)

Ускорение свободного падения  $g = 10\text{ m s}^{-2}$ ,  $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ ,  $\cos 30^\circ = 0,866$

## Barem PROBLEMA 1

P1.1.



3x0,2 p

P1.2.

$$m\ddot{a} = \dot{F}_f + \dot{N} + \dot{m}\ddot{g}$$

5 x0,2 p

$$ma = -F_f + mg \sin \alpha$$

2 x0,2 p

$$N = mg \cos \alpha$$

$$F_f = \mu N$$

$$a = g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)$$

$$\mu = 0, \Rightarrow a = 5,0 \text{ ms}^{-2} \Rightarrow t_0 = \sqrt{\frac{2l}{a}} = 0,20 \text{ s} < t \Rightarrow a \neq 5,0 \text{ ms}^{-2} \Rightarrow F_f \neq 0 \Rightarrow \mu \neq 0 \quad 7 \text{ x0,2 p}$$

$$\mu = \operatorname{tg} \alpha - \frac{a}{g \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{2l}{gt^2 \cos \alpha} = 0,32 \quad 2 \text{ x0,2 p}$$

P1.3.

$$m\ddot{a} = \dot{F}_f + \dot{N} + \dot{m}\ddot{g} + \dot{F}_i$$

6 x0,2 p

$$F_i = -mA$$

1 x0,2 p

$$ma = -F_f - mg \sin \alpha + mA \cos \alpha$$

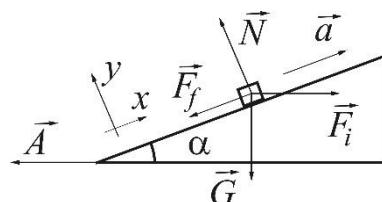
2 x0,2 p

$$N = mg \cos \alpha + mA \sin \alpha$$

$$F_f = \mu N$$

$$a = -g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) + A(\cos \alpha - \mu \sin \alpha) \quad 1 \text{ x0,2 p}$$

$$A \rightarrow \min \Rightarrow a = 0 \Rightarrow A = g \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} \quad 3 \text{ x0,2 p}$$



P1.4.

$$m\ddot{a} = \dot{F}_f + \dot{N} + \dot{m}\ddot{g} + \dot{F}_i$$

6 x0,2 p

$$F_i = -mA$$

1 x0,2 p

$$ma = -F_f - mg \sin \alpha + mA \cos(\beta - \alpha)$$

2 x0,2 p

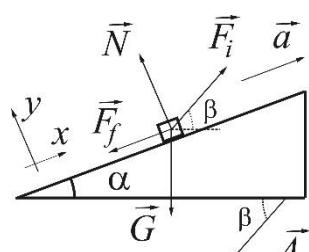
$$N = mg \cos \alpha - mA \sin(\beta - \alpha)$$

$$F_f = \mu N$$

$$a = g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha) + A(\cos(\beta - \alpha) + \mu \sin(\beta - \alpha)) \quad 1 \text{ x0,2 p}$$

$$a \rightarrow \max \Leftrightarrow (\cos(\beta - \alpha) + \mu \sin(\beta - \alpha)) \rightarrow \max \Rightarrow$$

$$\beta = \alpha + \arctg \mu = 30^\circ + 17,8^\circ = 47,8^\circ = 0,83 \text{ rad}$$



## PROBLEMA 2

(10,0 p)

**P2.** Un tub cilindric din sticlă, deschis la ambele capete cu lungimea  $l = 200 \text{ mm}$  și diametrul interior  $d = 7,3 \text{ mm}$  este scufundat într-un vas cilindric mare cu apă. Diametrul exterior al tubului este  $D = 8,0 \text{ mm}$ . La următorii doi itemi indicați forțele pe desen.

**P2.1.** Deducreți expresia și determinați care este diferența de nivel  $h_0$  ale lichidului din tub și vas? (1,2p)

**P2.2.** Tubul a fost ridicat vertical lent. Determinați care este înălțimea coloanei de lichid  $h$  care rămâne în tub? (1,2p)

**P2.3.** Capătul superior al tubului a fost astupat, apoi tubul a fost scufundat complet înapoi în vasul cu apă. Care este înălțimea coloanei de aer  $H$  din tub, dacă inițial în tub era doar aer, iar apă și aerul din tub sunt în echilibru termic? Obțineți rezultatul neglijând forțele de tensiune superficială. Care ar fi corecția la rezultatul precedent, dacă se va ține cont de influența forțelor de tensiune superficială? (1,2p)

**P2.4.** Care este lucrul efectuat de forțele exterioare  $L_{ext}$  la scufundarea verticală completă a tubului închis la ambele capete? Argumentați dacă este cazul să fie neglijată forța de tensiune superficială. Cum se va schimba rezultatul obținut dacă vasul cilindric nu este larg, dar are aria secțiunii orizontale  $S = 5,0 \text{ cm}^2$ ? Se vor neglija forțele de tensiune superficială. (3,7p)

**P2.5.** Care este lucrul efectuat de gazul ideal  $L$  la scufundarea completă a tubului conform punctului **P2.3**, considerând procesul izoterm, iar presiunea inițială a aerului din tub era  $p_0$ ? Obțineți formula fără calcule. (0,8p)

**P2.6.** Tubul cu capătul de jos astupat a fost lăsat liber în lichidul din pahar. Neglijând forțele de rezistență, și considerând mișcarea tubului strict pe verticală, determinați care este perioada micilor oscilații. Considerați vasul în care se scufundă tubul larg. (1,7p)

Ai putea avea nevoie de: accelerarea căderii libere este  $g = 10,0 \text{ ms}^{-2}$ , coeficientul de tensiune superficială a apei  $\sigma = 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ N m}^{-1}$ , densitatea apei  $\rho_0 = 1,00 \text{ g cm}^{-3}$ , densitatea sticlei  $\rho = 2,50 \text{ g cm}^{-3}$ , presiunea atmosferică  $p_0 = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ ,  $\pi = 3,14$ , densitatea aerului  $\rho_{air} : 10^{-3} \rho_0$  este mult mai mică decât cea a apei.

## ЗАДАЧА 2

(10,0 p)

**P2.** Стеклянная цилиндрическая трубка, открытая с обеих концов, длиной  $l = 200 \text{ см}$  и внутренним диаметром  $d = 7,3 \text{ см}$  погружена в большой цилиндрический сосуд, наполненный водой. Внешний диаметр трубки  $D = 8,0 \text{ см}$ . Для следующих двух пунктов нарисуйте соответствующие силы на рисунке.

**P2.1.** Получите выражение и определите, какова разница  $h_0$  между уровнями жидкости в трубке и сосуде. (1,2p)

**P2.2.** Трубку медленно подняли вверх. Определите высоту  $h$  столба жидкости, оставшейся в трубке. (1,4p)

**P2.3.** Верхний конец трубки закрыли, затем трубку полностью погрузили обратно в сосуд с водой. Какова высота  $H$  столба воздуха в трубке, если изначально в трубке был только воздух, а вода и воздух в трубке находятся в состоянии теплового равновесия? Получите результат, пренебрегая силами поверхностного натяжения. Какова будет поправка к предыдущему результату, если учесть влияние сил поверхностного натяжения? (1,2p)

**P2.4.** Какова работа внешних сил  $L_{ext}$  при полном вертикальном погружении трубки, закрытой с обеих концов? Аргументируйте, целесообразно ли пренебрегать силой поверхностного натяжения. Как изменится результат, если цилиндрический сосуд не широк, а имеет площадь поперечного горизонтального сечения  $S = 5,0 \text{ см}^2$ ? Силами поверхностного натяжения пренебречь. (3,7p)

**P2.5.** Какова работа  $L$ , совершаемая идеальным газом при полном погружении трубки согласно пункту **P2.3**, если рассматривать процесс как изотермический при начальном давлении воздуха в трубке  $p_0$ ? Представьте формулу без вычислений. (0,8p)

**P2.6.** Трубку с закрытым нижним концом свободно отпустили в сосуде с жидкостью. Пренебрегая силами сопротивления и рассматривая движение трубки строго по вертикали, определите период малых вертикальных колебаний. Считайте сосуд, в котором находится трубка, достаточно широким. (1,7p)

Вам могут понадобиться: ускорение свободного падения  $g = 10,0 \text{ м s}^{-2}$ , коэффициент поверхностного натяжения воды  $\sigma = 7,3 \cdot 10^{-2} \text{ Н м}^{-1}$ , плотность воды  $\rho_0 = 1,00 \text{ г см}^{-3}$ , плотность стекла  $\rho = 2,50 \text{ г см}^{-3}$ , атмосферное давление  $p_0 = 1,00 \cdot 10^5 \text{ Па}$ ,  $\pi = 3,14$ , плотность воздуха  $\rho_{air} : 10^{-3} \rho_0$  пренебрежимо мала по сравнению с плотностью воды.

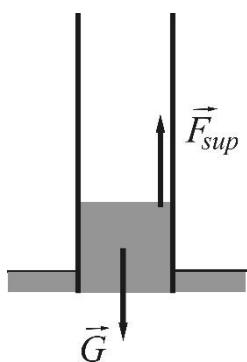
## Barem PROBLEMA 2

**P2.1.** 1,2 p  
 $mg = \sigma l_{cerc}$  3x0,1 p

$\rho_0 \frac{\pi d^2}{4} h_0 g = \sigma \pi d$  3 x0,1 p

$h_0 = \frac{4\sigma}{\rho_0 gd} = 4,0 \text{ mm}$  2 x0,1 p

Desen cu forțe 4 x0,1 p

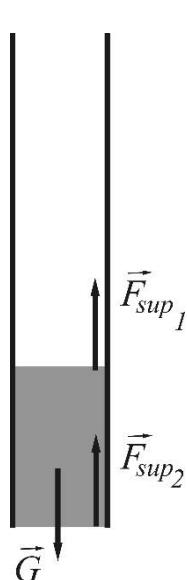


**P2.2.** 1,4 p  
 $mg = 2\sigma l_{cerc}$  3x0,1 p

$\rho_0 \frac{\pi d^2}{4} hg = 2\sigma \pi d$  3 x0,1 p

$h = \frac{8\sigma}{\rho_0 gd} = 8,0 \text{ mm}$  2 x0,1 p

Desen cu forțe 6 x0,1 p



**P2.3.** 1,2 p

$p_0 V_0 = pV$

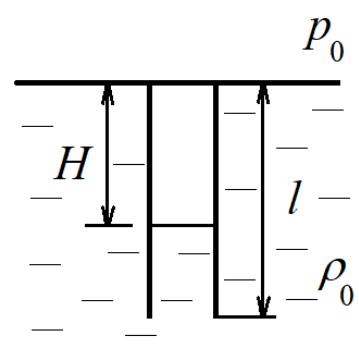
$p_0 l S = (p_0 + \rho_0 g H) HS$

$H = \frac{-p_0 + \sqrt{p_0^2 + 4\rho_0 g p_0 l}}{2\rho_0 g} = 0,196 \text{ m}$  2 x0,1 p

Corecția (influența forțelor de tensiune superficială):

$\Delta H = \frac{4\sigma}{\rho_0 gd} = 4,0 \text{ mm}$  2 x0,1 p

$H' = H - \Delta H = 0,192 \text{ m}$  2 x0,1 p



**P2.4.** 3,7 p

$L_{ext} = |L_{grav} + L_{Arh} + L_{sup}|$  3 x0,1 p

$L_{grav} = -mgl = -(m_{tub} + m_{aer})gl$  2 x0,1 p

$m_{tub} = \rho V = \rho l \left( \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} \right) \approx 4,2 \text{ g}$  2 x0,1 p

$m_{aer} \approx \rho_{aer} V = \rho_{aer} l \frac{\pi d^2}{4} = 0,01 \text{ g}$  – putem neglija masa aerului din tub

$L_{grav} \approx -m_{tub} gl = -\frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \rho gl^2 = -0,84 \cdot 10^{-2} \text{ J}$  4 x0,1 p

$L_{Arh} = \frac{1}{2} F_{Amax} l = \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\pi D^2}{4} gl^2 = 1,00 \cdot 10^{-2} \text{ J}$  3 x0,1 p

$L_{sup} = -\sigma \pi D l = 3,7 \cdot 10^{-4} \text{ J} = L_{Arh}$  2 x0,1 p

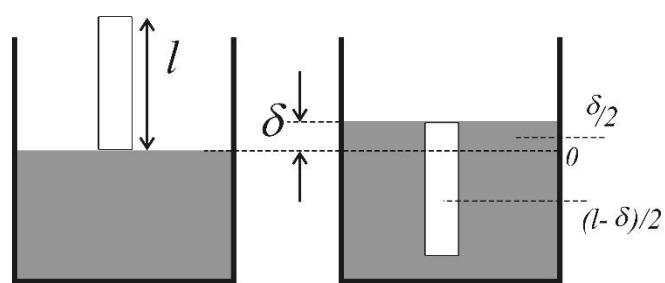
$L_{ext} \approx \left[ \frac{\pi D^2}{8} \rho_0 - \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) \rho \right] gl^2 = 0,16 \cdot 10^{-2} \text{ J}$  2 x0,1 p

Lichidul dezlocuit de tub urcă la suprafața vasului, astfel nivelul apei se ridică cu  $\delta$ .

$V_{lichid} = \delta (S - \pi D^2 / 4) = V_{tub} = \frac{\pi D^2}{4} (l - \delta)$  6 x0,1 p

$\delta = \frac{\pi D^2 l}{4S} = 2,0 \text{ mm}$  2 x0,1 p

Centrul de masă al lichidului dezlocuit de tub:  $x_{cl} = -(l - \delta)/2$



Centrul de masă al lichidului ridicat la suprafață:  $x_{c2} = \delta/2$

**2 x0,1 p**

Lucrul necesar pentru ridicarea lichidului la suprafață

$$L_{lichid} = \delta(S - \pi D^2/4) \rho_0 g (x_{c2} - x_c) = \delta(S - \pi D^2/4) \rho_0 g \frac{l}{2} = 0,9 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

**5 x0,1 p**

$$L'_{ext} = L_{ext} + L_{lichid} = 1,06 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

**2 x0,1 p**

**P2.5.**

**0,8p**

$$p = \frac{\nu RT}{V}$$

$$dL = pdV$$

**2 x0,1 p**

$$L = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

**4 x0,1 p**

$$L = p_0 l \frac{\pi d^2}{4} \ln \frac{H}{l} = p_0 l \frac{\pi d^2}{4} \ln \frac{\sqrt{p_0^2 + 4\rho_0 g p_0 l}}{2\rho_0 g l}$$

**2 x0,1 p**

( $H$  din **P2.3**, considerând că presiunea inițială a aerului din tub era  $p_0$ )

**P2.6.**

**1,7p**

În echilibru:  $mg = F_A$

**2 x0,1 p**

Oscilații:  $mg + F = F_A$

**3 x0,1 p**

$$F_A = \rho_0 S_{tub} (b+x) g = F_A + \rho_0 \frac{\pi D^2}{4} gx$$

**3 x0,1 p**

$$F = mg - F_A = \rho_0 \frac{\pi D^2}{4} gx$$

**2 x0,1 p**

$$F = kx \quad k = \rho_0 \frac{\pi D^2}{4} g$$

**2 x0,1 p**

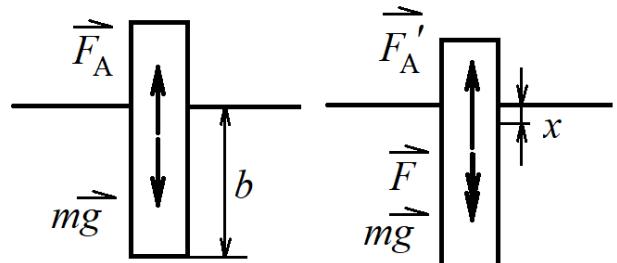
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

**2 x0,1 p**

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{16\pi m}{\rho_0 D^2 g}} = \frac{2\pi}{D} \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0} \frac{(D^2 - d^2)l}{g}} = 0,12 \text{ s}$$

**3 x0,1 p**

$m \approx m_{tub} = \rho l \left( \frac{\pi D^2}{4} - \frac{\pi d^2}{4} \right)$  din **P2.4**, deoarece  $m_{aer}$  în tub este neglijabilă



**PROBLEMA 3**

(10,0 p)

**P3.** Două condensatoare plane cu aer cu aria plăcilor de  $S_1$ ,  $S_2$ , care se află la distanță  $d_1$  și  $d_2$  respectiv sunt conectate la tensiunile  $U_{01}$  și  $U_{02}$ , apoi după ce au fost încărcate au fost deconectate de la sursele de tensiune.

**P3.1.** Determinați capacitatele fiecărui condensator,  $C_{01}$ ,  $C_{02}$ . (0,4p)

**P3.2.** Determinați sarcinile acumulate pe fiecare condensator  $q_{01}$ ,  $q_{02}$ . (0,8p)

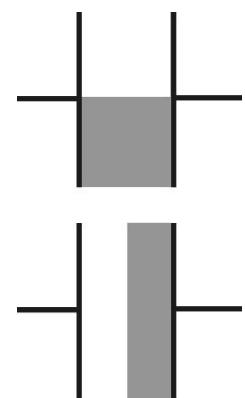
**P3.3.** Care sunt capacitatele condensatoarelor  $C_1$ ,  $C_2$  dacă spațiul dintre acestea a fost umplut la jumătate din volum cu un dielectric cu permisivitatea relativă  $\epsilon$ , astfel încât în primul condensator dielectricul atinge ambele plăci identic, iar în al doilea condensator dielectricul atinge doar o placă? (1,6p)

**P3.4.** Care este tensiunea pe fiecare condensator  $U_1$  și  $U_2$  după introducerea dielectricului conform punctului precedent? (1,6p)

**P3.5.** Care este tensiunea  $U_{++}$  la bornele grupării, dacă condensatoarele inițiale (din punctul P3.3) au fost conectate paralel cu respectarea polarității? Rezistența firelor de conexiune se va neglija. (0,8p)

**P3.6.** Cum se va modifica tensiunea la capetele grupării, față de rezultatul de la punctul precedent, dacă condensatoarele se vor conecta nerespectând polaritatea? (1,0p)

**P3.7.** Considerând cazul de la punctul P3.5, ținând cont că rezistența firelor de conexiune este  $R$ , obțineți expresia intensității curentului printr-un circuit și determinați cantitatea de căldură  $Q$  degajată prin efect Joule. (3,8p)

**ЗАДАЧА 3**

(10,0 p)

**P3.** Два плоских воздушных конденсатора с площадями пластин  $S_1$  и  $S_2$ , с расстояниями между пластинами  $d_1$  и  $d_2$  соответственно, были подключены к источникам напряжения  $U_{01}$  и  $U_{02}$ , а затем, после зарядки, отключены от источников напряжения.

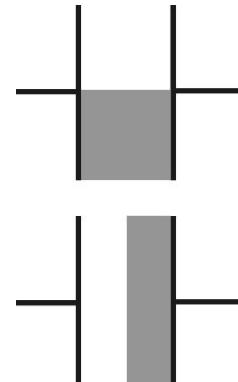
**P3.1.** Определите емкости каждого конденсатора  $C_{01}$ ,  $C_{02}$ . (0,4p)

**P3.2.** Определите заряды, накопленные на каждом конденсаторе,  $q_{01}$ ,  $q_{02}$ . (0,8p)

**P3.3.** Какова стала емкость конденсаторов  $C_1$ ,  $C_2$  если пространство между пластинами заполнили на половину объема диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  таким образом, что в первом конденсаторе диэлектрик касается обеих пластин одинаково, а во втором – только одной пластины? (1,6p)

**P3.4.** Каково напряжение на каждом конденсаторе  $U_1$  и  $U_2$  после того, как в них внесли диэлектрик согласно предыдущему пункту? (1,6p)

**P3.5.** Каково будет напряжение  $U_{++}$  между клеммами батареи, составленной из исходных конденсаторов (из пункта P3.3), если конденсаторы соединить параллельно с соблюдением полярности? Пренебречь сопротивлением соединительных проводов. (0,8p)



**P3.6.** Как изменится напряжение на концах батареи конденсаторов относительно предыдущего пункта, если конденсаторы соединить без соблюдения полярности? (1,0p)

**P3.7.** Рассмотрев случай из пункта P3.5 и принимая сопротивление соединительных проводов равным  $R$ , получите выражение тока в цепи и определите количество теплоты  $Q$ , выделяющейся в соответствии с законом Джоуля. (3,8p)

**Barem PROBLEMA 3**

10,0p

**P3.1.** 0,4 p

$$C_{01} = \frac{\epsilon_0 S_1}{d_1}; \quad C_{02} = \frac{\epsilon_0 S_2}{d_2} \quad \text{2x0.2 p}$$

**P3.2.** 0,8 p

$$q_{01} = C_{01} U_{01} = \frac{\epsilon_0 S_1}{d_1} U_{01}; \quad q_{02} = C_{02} U_{02} = \frac{\epsilon_0 S_2}{d_2} U_{02} \quad \text{4x0.2 p}$$

**P3.3.****1,6 p**

$$C_1 = C_{j_{\infty}} + C_{sus} = \frac{\varepsilon_0 \mathcal{S}_1 / 2}{d_1} + \frac{\varepsilon_0 \mathcal{S}_1 / 2}{d_1} = \frac{\varepsilon_0 \mathcal{S}_1}{2d_1} (1 + \varepsilon) \quad \text{4x0.2 p}$$

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{C_s} + \frac{1}{C_{or}} = \frac{d_2 / 2}{\varepsilon_0 \mathcal{S}_2} + \frac{d_2 / 2}{\varepsilon_0 \mathcal{S}_2} = \frac{d_2}{2\varepsilon_0 \mathcal{S}_2} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \quad C_2 = \frac{2\varepsilon_0 \mathcal{S}_2}{d_2} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \quad \text{4x0.2 p}$$

**P3.4.****1,6 p**

$$U_1 = \frac{q_{01}}{C_1} = \frac{\frac{\varepsilon_0 \mathcal{S}_1}{d_1} U_{01}}{\frac{\varepsilon_0 \mathcal{S}_1}{2d_1} (1 + \varepsilon)} = \frac{2U_{01}}{1 + \varepsilon} \quad \text{4x0.2 p}$$

$$U_2 = \frac{q_{02}}{C_2} = \frac{\frac{\varepsilon_0 \mathcal{S}_2}{d_2} U_{02}}{\frac{2\varepsilon_0 \mathcal{S}_2}{d_2} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}} = U_{02} \frac{1 + \varepsilon}{2\varepsilon} \quad \text{4x0.2 p}$$

**P3.5.****0,8p**

$$U_{++} = \frac{q_{01} + q_{02}}{C_1 + C_2} = \frac{\frac{\varepsilon_0 \mathcal{S}_1}{d_1} U_{01} + \frac{\varepsilon_0 \mathcal{S}_2}{d_2} U_{02}}{\frac{\varepsilon_0 \mathcal{S}_1}{2d_1} (1 + \varepsilon) + \frac{2\varepsilon_0 \mathcal{S}_2}{d_2} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}} = \frac{\frac{\mathcal{S}_1}{d_1} U_{01} + \frac{\mathcal{S}_2}{d_2} U_{02}}{\frac{\mathcal{S}_1}{2d_1} (1 + \varepsilon) + \frac{2\mathcal{S}_2}{d_2} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}} = \frac{U_{01} + \frac{\mathcal{S}_2}{\mathcal{S}_1} \frac{d_1}{d_2} U_{02}}{\frac{1 + \varepsilon}{2} + \frac{\mathcal{S}_2}{\mathcal{S}_1} \frac{d_1}{d_2} \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon}} \quad \text{4x0.2 p}$$

**P3.6.****1,0p**

$$U_{+-} = \frac{|q_{01} - q_{02}|}{C_1 + C_2} = \frac{\left| \frac{\varepsilon_0 \mathcal{S}_1}{d_1} U_{01} - \frac{\varepsilon_0 \mathcal{S}_2}{d_2} U_{02} \right|}{\frac{\varepsilon_0 \mathcal{S}_1}{2d_1} (1 + \varepsilon) + \frac{2\varepsilon_0 \mathcal{S}_2}{d_2} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}} = \frac{\left| \frac{\mathcal{S}_1}{d_1} U_{01} - \frac{\mathcal{S}_2}{d_2} U_{02} \right|}{\frac{\mathcal{S}_1}{2d_1} (1 + \varepsilon) + \frac{2\mathcal{S}_2}{d_2} \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}} = \frac{\left| U_{01} - \frac{\mathcal{S}_2}{\mathcal{S}_1} \frac{d_1}{d_2} U_{02} \right|}{\frac{1 + \varepsilon}{2} + \frac{\mathcal{S}_2}{\mathcal{S}_1} \frac{d_1}{d_2} \frac{2\varepsilon}{1 + \varepsilon}} \quad \text{4x0.2 p}$$

$$U_{++} = \frac{U_{01} + \frac{\mathcal{S}_2}{\mathcal{S}_1} \frac{d_1}{d_2} U_{02}}{\left| U_{01} - \frac{\mathcal{S}_2}{\mathcal{S}_1} \frac{d_1}{d_2} U_{02} \right|} \quad \text{1x0.2 p}$$

**P3.7.****3.8p**

$$\frac{q_1(t)}{C_1} + I(t)R = \frac{q_2(t)}{C_2} \quad \text{4x0.2 p}$$

$$q_1(0) = \frac{U_1}{C_1} \quad q_2(0) = \frac{U_2}{C_2} \quad q_1(0) = q_{01} \quad q_2(0) = q_{02} \quad \text{4x0.2 p}$$

$$q_1(t) + q_2(t) = q_1(0) + q_2(0) \quad I(t) = \frac{dq_1(t)}{dt} \quad \text{4x0.2 p}$$

$$\frac{dq_1}{dt} = -q_1 \left( \frac{1}{RC_1} + \frac{1}{RC_2} \right) + \frac{q_1(0) + q_2(0)}{RC_2}$$

Integrând avem:

$$q_1(t) = \frac{(C_2 q_{01} - C_1 q_{02}) e^{-\frac{t}{RC}} + C_1 q_{01} - C_1 q_{02}}{C_1 + C_2} \quad \text{0.8 p}$$

iar

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

$$I = \frac{dq_1(t)}{dt} = \frac{(C_1 q_{02} - C_2 q_{01})}{RC_1 C_2} e^{-\frac{t}{RC}} \quad \text{0.2 p}$$

$$Q = \int_0^\infty I^2 R dt = \frac{(C_1 q_{02} - C_2 q_{01})^2}{2C_1 C_2 (C_1 + C_2)} = \frac{C(U_{02} - U_{01})^2}{2} \quad \text{0.4 p}$$