

**OLIMPIADA LA MATEMATICĂ**  
**etapa raională/municipală, 4 februarie 2023, Clasa a X – a**  
**BAREM DE EVALUARE**

<b>10.1.</b> Arătați că nu există două numere naturale nenule $m$ și $n$ care să verifice egalitatea $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{253}$ .		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pasul	Etapă ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se presupune că există $m, n \in \mathbb{N}^*$ , astfel încât $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{253}$ .	1p.
2	Se obține $2\sqrt{253} \cdot m = m - n + 253 \in \mathbb{N}$ .	1p.
3	Se obține $m = 253 \cdot a^2$ , $a \in \mathbb{N}^*$ și $n = 253 \cdot b^2$ , $b \in \mathbb{N}^*$ . În particular: pentru obținerea numai uneia dintre aceste relații se acordă 2p.	3p.
4	Se obține contradicția $\sqrt{253} \geq 2\sqrt{253}$ .	2p.
Punctaj total		7 puncte

**Remarcă:** Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

<b>10.2.</b> Fie $a$ , $b$ și $c$ lungimile laturilor unui triunghi. Arătați că dacă $a^2 + b^2 + c^2 = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} = 6$ , atunci acest triunghi este dreptunghic.		
Rezolvare cu barem de evaluare		
Pasul	Etapă ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se obține relația $a(a-1) + b(b-\sqrt{2}) + c(c-\sqrt{3}) = 0$ .	1p.
2	Se obține relația $1(a-1) + \sqrt{2}(b-\sqrt{2}) + \sqrt{3}(c-\sqrt{3}) = 0$ .	2p.
3	Se obține $(a-1)^2 + (b-\sqrt{2})^2 + (c-\sqrt{3})^2 = 0$ .	2p.
4	Se obține $a = 1$ , $b = \sqrt{2}$ , $c = \sqrt{3}$ .	1p.
5	Se observă că $a^2 + b^2 = c^2$ , de unde triunghiul este dreptunghic.	1p.
Punctaj total		7 puncte

**Remarcă:** Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

**10.3.** Fie  $ABC$  un triunghi, iar  $P$  un punct care aparține interiorului acestui triunghi. Pe laturile  $AC$  și  $BC$  se consideră punctele  $D$  și  $E$ , respectiv, astfel încât  $\angle DPC \equiv \angle ABC$  și  $\angle EPC \equiv \angle BAC$ . Arătați că  $AD \cdot CE = BE \cdot CD$ .

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se obține $m(\angle DCE) + m(\angle DPE) = 180^\circ$ .	2p.
2	Se obține că patrulaterul $CDPE$ este inscriptibil.	1p.
3	Se obține $\angle DEC \equiv \angle ABC$ .	1p.
4	Se obține că dreptele $AB$ și $DE$ sunt paralele.	1p.
5	Se utilizează teorema Thales pentru $\triangle ABC$ .	1p.
6	Se obține $AD \cdot CE = BE \cdot CD$ .	1p.
	Punctaj total	7 puncte

**Remarcă:** Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

**10.4.** Se consideră mulțimea  $M = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid ax + by = 1\}$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale date.

Determinați valoarea maximă a expresiei  $E(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$ , dacă  $(x, y) \in M$ .

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se studiază cazul $b = 0$ și se obține $a \neq 0$ și $x = \frac{1}{a}$ , $y \in \mathbb{R}$ .	1p.
2	Se obține $E(x, y) \leq a^2 + b^2$	1p.
2	Se menționează că în cazul $b = 0$ , $\max E(x, y) = a^2 + b^2$ când $x = \frac{1}{a}$ și $y = 0$ .	1p.
3	Se studiază cazul $b \neq 0$ și se obține $x^2 + y^2 = \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \cdot x^2 - \frac{2a}{b^2} \cdot x + \frac{1}{b^2}$ .	2p.
4	Se consideră funcția de gradul doi $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , $f(x) = \left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \cdot x^2 - \frac{2a}{b^2} \cdot x + \frac{1}{b^2}$ .	1p.
5	Se obține minimum funcției $f(x)$ egal cu $\frac{1}{a^2 + b^2}$ .	1p.
	Punctaj total	7 puncte

**Remarcă:** Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.

**10.5.** Determinați toate valorile parametrului real  $a$  pentru care ecuația  $3x^4 + 11ax + 2a^2 = 0$  are cel puțin o soluție număr întreg.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1	Se studiază cazul $a = 0$ .	1p.
2	Se studiază cazul $a \neq 0$ și se obține $x \neq 0$ .	1p.
3	Se consideră $a$ necunoscută, iar $x$ – parametru.	1p.
4	Se obține condiția $x^2 \leq \frac{121}{24}$ .	1p.
5	Se obține $x \in \{\pm 1; \pm 2\}$ .	1p.
6	Se determină $a$ pentru $x = \pm 1$ .	1p.
6	Se determină $a$ pentru $x = \pm 2$ .	1p.
	Punctaj total	7 puncte

**Remarcă:** Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.