ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Районный/городской тур, 4 февраля 2023 года, X класс
СХЕМА ОЦЕНКИ РАБОТ

10.1. Покажите, что не существуют два ненулевых натуральных числа m и n для которых истинно равенство $\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{253}$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	**Этапы решения**	**Количество баллов**
1	Указание того, что $(\exists)\, m,n\in\mathbb{N}^*$, такое что $\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{253}$.	1б.
2	Получение соотношения $2\sqrt{253\cdot m}=m-n+253\in\mathbb{N}$.	1б.
3	Получение $m=253\cdot a^2$, $a\in\mathbb{N}^*$ и $n=253\cdot b^2$, $b\in\mathbb{N}^*$. (при получения только одного соотношения – 2б)	3б.
4	Получение противоречия $\sqrt{253}\geq 2\sqrt{253}$.	2б.
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное разрешение оценивается в 7 баллов.*

10.2. Пусть a, b и c – длины сторон треугольника. Покажите, что если $a^2+b^2+c^2=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=6$, тогда треугольник – прямоугольный.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	**Этапы решения**	**Количество баллов**
1	Получение соотношения $a(a-1)+b\left(b-\sqrt{2}\right)+c\left(c-\sqrt{3}\right)=0$.	1б.
2	Получение соотношения $1(a-1)+\sqrt{2}\left(b-\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\left(c-\sqrt{3}\right)=0$.	2б.
3	Получение $(a-1)^2+\left(b-\sqrt{2}\right)^2+\left(c-\sqrt{3}\right)^2=0$.	2б.
4	Получение $a=1$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{3}$.	1б.
5	Замечание $a^2+b^2=c^2$, тогда треугольник – прямоугольный	1б.
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное разрешение оценивается в 7 баллов.*

10.3. Дан треугольник ABC и точка P находящаяся внутри треугольника. На сторонах AC и BC взяты две точки D и E, соответственно такие, что $\angle DPC \equiv \angle ABC$ и $\angle EPC \equiv \angle BAC$. Покажите, что $AD \cdot CE = BE \cdot CD$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	**Этапы решения**	**Количество баллов**
1	Получение $m(\angle DCE) + m(\angle DPE) = 180^{\circ}$.	2б.
2	Получение: четырёхугольник $CDPE$ - вписываемый.	1б.
3	Получение $\angle DEC \equiv \angle ABC$.	1б.
4	Получение: прямые AB и DE - параллельны.	1б.
5	Применение теоремы Фалеса в $\triangle ABC$.	1б.
6	Получение $AD \cdot CE = BE \cdot CD$.	1б.
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное разрешение оценивается в 7 баллов.*

10.4. Дано множество $M = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid ax + by = 1\}$, где a и b – заданные действительные числа. Найдите наибольшее значение выражения $E(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$, если $(x, y) \in M$.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	**Этапы решения**	**Количество баллов**
1	Рассматривается случай $b = 0$ и получается $a \neq 0$ и $x = \dfrac{1}{a}$, $y \in \mathbb{R}$.	1б.
2	Получение $E(x, y) \leq a^2 + b^2$	1б.
3	Отмечается, что при $b = 0$, $\max E(x, y) = a^2 + b^2$ когда $x = \dfrac{1}{a}$ и $y = 0$.	1б.
4	Рассматривается случай $b \neq 0$ и получение $x^2 + y^2 = \left(1 + \dfrac{a^2}{b^2}\right) \cdot x^2 - \dfrac{2a}{b^2} \cdot x + \dfrac{1}{b^2}$.	2б.
5	Вводится функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \left(1 + \dfrac{a^2}{b^2}\right) \cdot x^2 - \dfrac{2a}{b^2} \cdot x + \dfrac{1}{b^2}$.	1б.
6	Получение минимума функции $f(x)$ равному $\dfrac{1}{a^2 + b^2}$.	1б.
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное разрешение оценивается в 7 баллов.*

10.5. Найдите все значения действительного параметра a, при которых уравнение $3x^4+11ax+2a^2=0$ имеет хотя бы одно целое решение.

Этапы решения со схемой распределения баллов

Шаг	**Этапы решения**	**Количество баллов**
1	Исследование случая $a=0$.	1б.
2	Исследование случая $a\neq 0$ и получение $x\neq 0$.	1б.
3	Считается что a – неизвестная а x – параметр.	1б.
4	Получение условия $x^2\le\frac{121}{24}$.	1б.
5	Получение $x\in\{\pm 1;\pm 2\}$.	1б.
6	Находится a при $x=\pm 1$.	1б.
7	Находится a при $x=\pm 2$.	1б.
	Общее количество баллов	7 баллов

Примечание: *Любое другое правильное разрешение оценивается в 7 баллов.*