ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
районный/муниципальный тур, 4 февраля 2023 г., XI класс

11.1. Две параллельные прямые разбивают квадрат со стороной a на три геометрические фигуры равной площади. Найти минимальное значение суммы периметров этих трех геометрических фигур.

11.2. Определить все возможные наборы (x, y, z, t) положительных действительных чисел, которые удовлетворяют системе:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 16, \\ xyzt = xy + xz + xt + yz + yt + zt + 160. \end{cases}$$

11.3. Даны положительные действительные числа a, b, c такие, что $abc = 8$. Докажите, что

$$\frac{2}{2+a+b} + \frac{2}{2+b+c} + \frac{2}{2+c+a} \leq 1.$$

11.4. Даны треугольник *ABC* и произвольная точка D внутри стороны $[BC]$. Рассмотрим окружности, вписанные в треугольники *ABD* и, соответственно, *ACD*. Обозначим через d общую касательную к этим двум окружностям, которая отлична от *AD* и *BC*. Прямая d пересекает прямую *AD* в точке *K*. Докажите, что длина отрезка $[AK]$ не зависит от положения точки *D* на стороне $[BC]$.

11.5. Дана последовательность $(x_n)_{n\geq 1}$,

$$x_n = \underbrace{\sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \cdots + \sqrt[3]{6}}}}_{n \text{ корней}}.$$

Доказать существование и вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty} 6^n(2 - x_n)$.

Время работы: 240 минут.
Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!