ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
районный/муниципальный тур, 4 февраля 2023 г., XII класс

12.1. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$. Вычислите числовое значение площади фигуры, ограниченной графиком функции f, касательной к графику функции f в точке с абсциссой $x = 0$ и прямой $x = \sqrt{3}$.

12.2. Плоские углы при вершине V пирамиды $VABC$ равны 90°. Площади боковых граней VAB и VAC равны 3 см^2 и 4 см^2, соответственно. Двугранный угол между плоскостями VBC и ABC равен 30°. Найдите площадь основания ABC.

12.3. Найдите комплексные числа z, для которых $|z| = 2023$ и $|z^{2023} + (\bar{z})^{2023}| = 2023^{2023}$, где $\bar{z}$ – комплексное сопряжённое к числу z.

12.4. Дана функция $f: (1; +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{4x+2}{x^4+2x^3-x^2-2x}$. Пусть $F: (1; +\infty) \to \mathbb{R}$ - первообразная функции f такая, что $F(2) = \ln\frac{2}{3}$. Вычислите

$$\lim_{n\to+\infty}(F(2) + F(3) + \cdots + F(n)).$$

12.5. Найдите квадратные матрицы X, второго порядка, элементы которых являются целыми числами, такие, что

$$X^3 - 3X^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Время работы: 240 минут.
Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!

ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
районный/муниципальный тур, 4 февраля 2023 г., XII класс

12.1. Дана функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$. Вычислите числовое значение площади фигуры, ограниченной графиком функции f, касательной к графику функции f в точке с абсциссой $x = 0$ и прямой $x = \sqrt{3}$.

12.2. Плоские углы при вершине V пирамиды $VABC$ равны 90°. Площади боковых граней VAB и VAC равны 3 см^2 и 4 см^2, соответственно. Двугранный угол между плоскостями VBC и ABC равен 30°. Найдите площадь основания ABC.

12.3. Найдите комплексные числа z, для которых $|z| = 2023$ и $|z^{2023} + (\bar{z})^{2023}| = 2023^{2023}$, где $\bar{z}$ – комплексное сопряжённое к числу z.

12.4. Дана функция $f: (1; +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{4x+2}{x^4+2x^3-x^2-2x}$. Пусть $F: (1; +\infty) \to \mathbb{R}$ - первообразная функции f такая, что $F(2) = \ln\frac{2}{3}$. Вычислите

$$\lim_{n\to+\infty}(F(2) + F(3) + \cdots + F(n)).$$

12.5. Найдите квадратные матрицы X, второго порядка, элементы которых являются целыми числами, такие, что

$$X^3 - 3X^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Время работы: 240 минут.
Правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов.
ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!