OLIMPIADA LA MATEMATICĂ
etapa raională/municipală, 4 februarie 2023, Clasa a VII–a
Soluții

7.1. Rotunjiți până la întreg numărul $a = \frac{1}{\sqrt{7-\sqrt{48}}}$.

Soluție:

Observăm că $7-\sqrt{48} = 7-4\sqrt{3} = \left(2-\sqrt{3}\right)^2$. Astfel, $\sqrt{7-\sqrt{48}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = \left|2-\sqrt{3}\right| = 2-\sqrt{3}$.
În acest caz, numărul a capătă forma $a = \frac{1}{2-\sqrt{3}} = 2+\sqrt{3}$. Cum $1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}8$, obținem $3{,}7 < a = 2+\sqrt{3} < 3{,}8$. Astfel, obținem că valoarea rotunjită până la întreg a numărului a este 4.

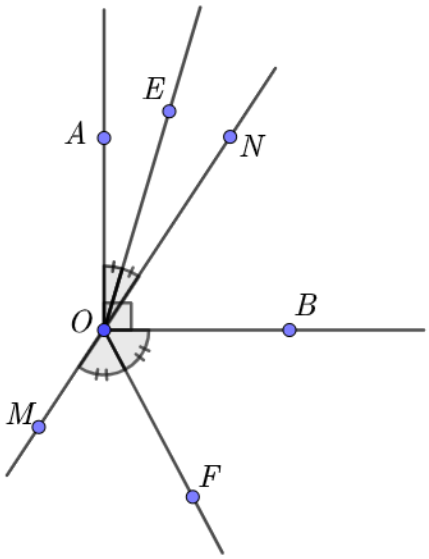
Răspuns: 4.

7.2. Se consideră unghiul AOB cu măsura de 90^0. Prin punctul O se duce dreapta MN, astfel încât punctul M aparține exteriorului unghiului AOB, iar punctul N aparține interiorului acestuia. Dacă $[OE$ este bisectoarea unghiului AON, iar $[OF$ este bisectoarea unghiului MOB, determinați măsura unghiului EOF.

Soluție:

Notăm $m(\angle AON) = (2x)^\circ$. Conform datelor problemei obținem $m(\angle NOB) = 90^\circ - (2x)^\circ$, iar $m(\angle BOM) = 180^\circ - m(\angle NOB) = 90^\circ + (2x)^\circ$. Deoarece $[OE$ și $[OF$ sunt bisectoarele unghiurilor AON și respectiv, MOB, obținem $m(\angle EON) = x^\circ$ și $m(\angle BOF) = 45^\circ + x^\circ$. Astfel, $m(\angle EOF) = m(\angle EON) + m(\angle NOB) + m(\angle BOF) = x^\circ + 90^\circ - (2x)^\circ + 45^\circ + x^\circ = 135^\circ$.

Răspuns: $m(\angle EOF) = 135^\circ$.



7.3. Pentru orice număr natural n definim numerele $a = 4n+2,\ b = 4n+3,\ c = 8n+7$.

Demonstrați că numărul $\frac{[a,b]+[b,c]}{3}$ este un pătrat perfect.

(Aici, prin $[x,y]$ se notează cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale x și y)

Demonstrație:

Observăm că numerele $a = 4n+2$ și $b = 4n+3$ sunt numere naturale consecutive. Astfel, obținem că numerele a și b sunt prime între ele, adică $(a,b) = 1$, unde (a,b) reprezintă cel mai mare divizor comun al numerelor a și b. Vom demonstra că $(b,c) = 1$. Fie $(b,c) = d$. Cum $(4n+3) \vdots d$ și $(8n+7) \vdots d$, obținem $\left(8n+7-2(4n+3)\right) \vdots d$. Deci, $1 \vdots d$. Astfel, $d = (b,c) = 1$.
Deoarece $a \cdot b = [a,b] \cdot (a,b)$ și $(a,b) = 1$ rezultă că $[a,b] = a \cdot b$.
Analog obținem că $[b,c] = b \cdot c$.

Astfel, avem:

$$\frac{[a,b]+[b,c]}{3}=\frac{a\cdot b+b\cdot c}{3}=\frac{b\cdot(a+c)}{3}=\frac{(4n+3)(4n+2+8n+7)}{3}=\frac{(4n+3)(12n+9)}{3}$$
$$=(4n+3)(4n+3)=(4n+3)^2.$$

7.4. Fie secvența de numere $2,5,8,11,\dots,92,95$ (fiecare doi termeni vecini au modulul diferenței egal cu 3). Mihai ia la întâmplare 18 numere din această secvență. Arătați că printre numerele luate de Mihai, oricând există cel puțin două numere care au suma egală cu 100.

Demonstrație:

Observăm că în secvența dată conține 32 de numere. Totodată, în secvența $2,5,8,11,\dots,92,95$ există următoarele perechi de numere care au suma egală cu 100: $\{5;95\},\{8;95\},\{11;89\},\dots,\{47;53\}$, în total 15 perechi de numere. Menționăm că în secvența dată de numere, există doar un singur număr egal cu 50, și nu există nici un număr în această secvență care adunat cu 2 să dea suma 100. Aranjăm secvența de numere în următoarele 17 submulțimi: $\{2\},\{50\},\{5;95\},\{8;95\},\{11;89\},\dots,\{47;53\}$. Oricum ar alege Mihai 18 numere din cele 17 submulțimi, două dintre acestea, conform principiului Dirichlet (principiul cutiei), aparțin aceleași submulțimi. Astfel, acest două numere este egală cu 100.

7.5. Determinați suma tuturor numerelor de forma $\overline{abc}$, cifrele cărora verifică egalitățile:

$$\frac{b+c}{a^2+ab+ac}=\frac{a+c}{b^2+ab+bc}=\frac{a+b}{c^2+ac+bc}.$$

Soluție:

Conform proprietății șirurilor de rapoarte egale avem:

$$\frac{b+c}{a^2+ab+ac}=\frac{a+c}{b^2+ab+bc}=\frac{a+b}{c^2+ac+bc}$$
$$=\frac{(b+c)+(a+c)+(a+b)}{(a^2+ab+ac)+(b^2+ab+bc)+(c^2+ac+bc)}$$
$$=\frac{2(a+b+c)}{a(a+b+c)+b(b+a+c)+c(c+a+b)}=\frac{2(a+b+c)}{(a+b+c)(a+b+c)}=\frac{2}{a+b+c}.$$

Astfel,

$$\frac{b+c}{a(a+b+c)}=\frac{a+c}{b(b+a+c)}=\frac{a+b}{c(c+a+b)}=\frac{2}{a+b+c},$$

sau

$$\frac{b+c}{a}=\frac{a+c}{b}=\frac{a+b}{c}=2.$$

Din ultima relație scrisă, obținem $b+c=2a,\ a+c=2b$ și $a+b=2c$. Deoarece $b+c=2a$ și $a+c=2b$, obținem $a=b$. Cum $a+b=2c$, obținem $a=c$. Astfel, numerele $\overline{abc}$ care verifică relația de proporționalitate din enunț au forma $\overline{aaa}$, cu $a\neq 0$ și reprezintă numerele 111, 222, ..., 999.

În rezultat, suma celor 9 numere este $111+222+333+\cdots+999=111\cdot(1+2+3+\cdots+9)=111\cdot 9\cdot 5=4995$.

Răspuns: 4995