OLIMPIADA LA MATEMATICĂ
etapa raională/municipală, 5 februarie 2022, Clasa a IX–a
BAREM DE EVALUARE

Remarcă. ***Rezolvarea corectă a fiecărei probleme se apreciază cu 7 puncte.***

9.1. Numerele reale a și b satisfac egalitatea $\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1$. Aflați toate valorile numerice posibile ale fracției $F=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obține echivalența $\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1\Leftrightarrow a^4-b^4-b^4-a^2b^2=0$.	1 punct
2.	Obține egalitatea $(a^2-b^2)(a^2+b^2)-b^2(a^2+b^2)=0$.	1 punct
3.	Obține egalitatea $(a^2+b^2)(a^2-2b^2)=0$.	1 punct
4.	Obține totalitatea de egalitățiți $\left[\begin{array}{l} a^2=-b^2, \\ a^2=2b^2; \end{array}\right.$	1 punct
5.	Obține totalitatea de egalitățiți $\left[\begin{array}{l} a=b=0, \\ a^2=2b^2. \end{array}\right.$	1 punct
6.	Remarcă, că cazul $a=b=0$ nu face parte din domeniul valorilor admisibile.	1 punct
7.	Obține valoarea $F=\frac{1}{3}$ în cazul $a^2=2b^2$ și $a\neq 0\neq b$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

Remarcă: ***Oricare altă rezolvare corectă se apreciază cu 7 puncte.***

9.2. Arătați că nu există numere naturale n și k care verifică relația $k^3=4^n+2^n+1$.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Presupunerea absurdului, $4^n+2^n+1=k^3$, unde $n,k\in N$.	1 punct
2.	Obține condiția: k -număr impar, $k>3$.	1 punct
3.	Obține egalitatea $2^n(2^n+1)=(k-1)(k^2+k+1)$.	1 punct
4.	Deduce condiția: $k-1\vdots 2^n$.	1 punct
5.	Obține inegalitatea $k^2+k+1>4^n+2^n+1$.	1 punct
6.	Obține inegalitatea $(k-1)(k^2+k+1)>4^n+2^n+1$.	1 punct
7.	Obține contradicția $k^3>4^n+2^n+1$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

9.3. Aria triunghiului ABC este egală cu S. Pe laturile AB și BC se iau punctele H și E astfel încât $\frac{HA}{HB}=\frac{EB}{EC}=\frac{m}{n}$. Segmentele AE și CH se intersectează în punctul O. Aflați aria triunghiului AOC.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obține egalitatea $EC=\frac{n\cdot BC}{(n+m)}$ și $EB=\frac{m\cdot BC}{(n+m)}$.	1 punct
2.	Obține egalitatea $HA=\frac{m\cdot AB}{(n+m)}$ și $HB=\frac{n\cdot AB}{(n+m)}$.	1 punct
3.	Obține egalitatea $\frac{A_{AEB}}{A_{AEC}}=\frac{EB}{EC}=\frac{m}{n}$	1 punct
4.	Obține egalitatea $A_{AEC}=\frac{nS}{n+m}$	1 punct
5.	Trasează $ET\|\|CH$ și obține egalitățile $\frac{EC}{EB}=\frac{TH}{TB}=\frac{n}{m}$.	1 punct
6.	Obține egalitatea $\frac{HA}{HT}=\frac{m(m+n)}{n^2}$.	1 punct
7.	Obține egalitățile $\frac{OA}{OE}=\frac{m(m+n)}{n^2}$ și $A_{AOC}=\frac{m^2}{m^2+mn+n^2}\cdot S$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

9.4. Aflați cel mai mic și cel mai mare numere naturale n, care satisfac ecuația $\left[\frac{n}{2}\right]-2\cdot\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]=2021$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x.

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Cercetează numărul $\boldsymbol{n}$ în forma $n=12k+r$, unde $0\le r\le 11$.	2 puncte
2.	Obține egalitățile $\left[\frac{n}{2}\right]=6k+\left[\frac{r}{2}\right]$; $\left[\frac{n}{3}\right]=4k+\left[\frac{r}{3}\right]$; $\left[\frac{n}{4}\right]=3k+\left[\frac{r}{4}\right]$.	1 punct
3.	Obține egalitatea $k+\left[\frac{r}{2}\right]-2\cdot\left[\frac{r}{3}\right]+\left[\frac{r}{4}\right]=2021$.	1 punct
4.	Calculează valorile $E(r)=\left[\frac{r}{2}\right]-2\cdot\left[\frac{r}{3}\right]+\left[\frac{r}{4}\right]$ pentru $0\le r\le 11$.	1 punct
5.	Obține egalitatea $k-1=2021$ și calculează valoarea maximă a lui n: $n=12\cdot 2022+3=24267$.	1 punct
6.	Obține egalitatea $k+2=2021$ și calculează valoarea minimală a lui n: $n=12\cdot 2019+8=24236$.	1 punct
	Punctaj total	7 puncte

9.5. Demonstrați că pentru orice numere pozitive $a,\ b,\ c$ are loc inegalitatea

$$\frac{a^4+b^4+c^4+16}{a^2b+b^2c+c^2a}\geq\frac{8}{3}.$$

Când are loc egalitatea?

Rezolvare cu barem de evaluare

Pasul	Etape ale rezolvării	Punctaj acordat
1.	Obține inegalitatea $(2a^4+b^4+16)+(2b^4+c^4+16)+(2c^4+a^4+16)\geq 8(a^2b+b^2c+c^2a).$ (1) (1 punct pentru doar una din expresiile din paranteze din membrul stâng)	2 puncte
2.	Deduce inegalitățile $2a^4+b^4+16=2a^4+[(b^2)^2+4^2]\geq 2a^4+2\cdot b^2\cdot 4=2a^4+8b^2$.	1 punct
3.	Deduce inegalitățile $2a^4+8b^2=2\left[(a^2)^2+(2b)^2\right]\geq 2\cdot 2a^2\cdot 2b=8a^2b$, $2a^4+b^4+16\geq 8a^2b.$ (2)	1 punct
4.	Deduce inegalitățile $2b^4+c^4+16\geq 8b^2c.$ (3) $2c^4+a^4+16\geq 8c^2a.$ (4)	1 punct
5.	Adună inegalitățile (2) – (4) și obține inegalitatea (1).	1 punct
6.	Deduce că egalitatea are loc doar pentru $a=b=c=2.$	1 punct
	Punctaj total	7 puncte