ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ
Районный/муниципальный тур, 7 февраля 2026 г., X класс
СХЕМА ПРОВЕРКИ ТЕСТА

Примечание. ***Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.***

10.1. Докажите, что числа $a=\log_{12}24$ и $b=\log_6 18$ удовлетворяют соотношению $3a+2b=ab+5$.		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение $\log_{12}2=a-1$.	1 балл
2.	Получение $\log_2 3+2=\dfrac{1}{a-1}$.	1 балл
3.	Получение $\log_2 3=\dfrac{3-2a}{a-1}$ или $\log_3 2=\dfrac{a-1}{3-2a}$.	1 балл
4.	Получение $b=1+\log_6 3$.	1 балл
5.	Получение $b=1+\dfrac{1}{1+\log_3 2}$.	1 балл
6.	Получение $b=\dfrac{5-3a}{2-a}$.	1 балл
7.	Получение $3a+2b=ab+5$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

10.2. Покажите, что число $a=\dfrac{1}{\sqrt{1,5-\sqrt{2}}}-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}$ является натуральным числом.		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение $\dfrac{1}{\sqrt{1,5-\sqrt{2}}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.	1 балл
2.	Получение $\dfrac{1}{\sqrt{1,5-\sqrt{2}}}=2+\sqrt{2}$.	1 балл
3.	Получение $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}\right)^2}$.	1 балл
4.	Получение $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=\sqrt{\dfrac{2\sqrt{5}+2\sqrt{2+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{5}+1}}$.	1 балл
5.	Получение $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=\sqrt{\dfrac{2\sqrt{5}+2\sqrt{5-4}}{\sqrt{5}+1}}$.	1 балл
6.	Получение $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{5}}+\sqrt{\sqrt{5}-2}}{\sqrt{\sqrt{5}+1}}=\sqrt{2}$	1 балл
7.	Получение $a=2\in\mathbf{N}$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

10.3. Решите в действительных числах уравнение $$\frac{9x^2-2x}{\sqrt{3x-2}}-\frac{3x^2}{2}=5x.$$		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Получение $ОДЗ=\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$.	1 балл
2.	В *ОДЗ* получение эквивалентного уравнения $(3x+10)\sqrt{3x-2}-18x+4=0$.	1 балл
3.	Получение $(3x-2)\sqrt{3x-2}-3\cdot(3x-2)\cdot 2+3\cdot\sqrt{3x-2}\cdot 4-8=0$.	1 балл
4.	Получение $\left(\sqrt{3x-2}-2\right)^3=0$.	1 балл
5.	Получение $\sqrt{3x-2}=2$.	1 балл
6.	Получение $3x-2=4$.	1 балл
7.	Получение $x=2\in ОДЗ$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

10.4. Произвольная точка на описанной окружности равностороннего треугольника соединена с вершинами треугольника хордами. Докажите, что одна из этих хорд равна сумме двух других хорд.		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Фиксация произвольной точки М на одной из трех малых дуг окружности, описанной вокруг треугольника, ограниченных вершинами треугольника, и утверждение, что в случае совпадения точки М с одной из вершин треугольника утверждение в задаче верно.	1 балл
2.	В контексте рисунка в предложенном решении, строение $AD \parallel MC$ и утверждение, что $AMCD$ это равнобедренная трапеция.	1 балл
3.	Получение, что $AM=DC$ и $MC=BD$.	1 балл
4.	Получение, что $m(\angle MAP)=60^\circ=m(\angle DBP)$.	1 балл
5.	Получение, что треугольники *AMP* и *BDP* равносторонние.	1 балл
6.	Получение $MB=MA+MC$.	1 балл
7.	Утверждение, что аналогичным образом доказывается утверждение задачи, когда точка *M* принадлежит двум другим дугам BC и AB.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов

10.5. Найдите все действительные значения a, при которых многочлен $P(X)=(2a+2)X^2-(8a-4)X-(3a-4)$ имеет два различных действительных корня, оба меньше 1.		
Решение со схемой распределения баллов		
Шаг	Этапы решения	Количество баллов
1.	Определение $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=(2a+2)x^2-(8a-4)x-(3a-4)$, и утверждение, что функция f должна быть второй степени и иметь два различных нуля, оба меньше 1.	1 балл
2.	Получение $\Delta>0 \Leftrightarrow a\in\left(-\infty;-\frac{2}{11}\right)\cup(1;+\infty)$.	1 балл
3.	Получение $(2a+2)\cdot f(1)>0 \Leftrightarrow a\in\left(-1;\frac{10}{9}\right)$.	2 балла
4.	Получение $x_B<1 \Leftrightarrow a\in(-1;2)$.	2 балла
5.	Получение $a\in\left(-1;-\frac{2}{11}\right)\cup\left(1;\frac{10}{9}\right)$.	1 балл
	Общее количество баллов	7 баллов