OLIMPIADA LA MATEMATICĂ
etapa raională/municipală, 4 februarie 2023, Clasa a X-a
SOLUȚII

10.1. Arătați că nu există două numere naturale nenule m și n care să verifice egalitatea $\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{253}$.

Rezolvare. Presupunem că există $m,n\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{253}$. Putem scrie

$$\sqrt{n}=\sqrt{253}-\sqrt{m}\Rightarrow n=253+m-2\sqrt{253\cdot m}\Leftrightarrow 2\sqrt{253\cdot m}=m-n+253\in\mathbb{N}.$$

Observăm că $253\cdot m=11\cdot 23\cdot m$ trebuie să fie un pătrat perfect, deoarece 11 și 23 sunt numere prime, urmează că $m=253\cdot a^2$, $a\in\mathbb{N}^*$.

Analog, deducem că $n=253\cdot b^2$, $b\in\mathbb{N}^*$.

Atunci $\sqrt{253}=\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{253\cdot a^2}+\sqrt{253\cdot b^2}=\sqrt{253}\cdot(a+b)\geq\sqrt{253}\cdot(1+1)=2\sqrt{253}$.

Am obținut o contradicție. Deci este adevărat că nu există $m,n\in\mathbb{N}^*$, încât $\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{253}$.

10.2. Fie a, b și c lungimile laturilor unui triunghi. Arătați că dacă $a^2+b^2+c^2=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=6$, atunci acest triunghi este dreptunghic.

Rezolvare. Din egalitatea $a^2+b^2+c^2=a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}$, urmează $a(a-1)+b\left(b-\sqrt{2}\right)+c\left(c-\sqrt{3}\right)=0$ (1).

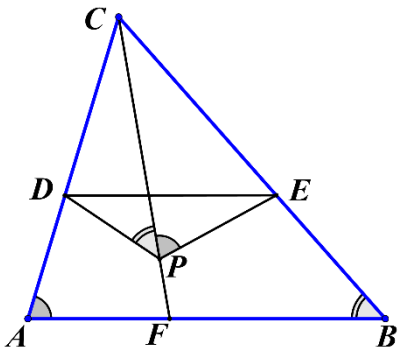
Din $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=6$ găsim $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=1+2+3\Leftrightarrow 1(a-1)+\sqrt{2}\left(b-\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}\left(c-\sqrt{3}\right)=0$ (2).

Scăzând din relația (1) relația (2), obținem $(a-1)^2+\left(b-\sqrt{2}\right)^2+\left(c-\sqrt{3}\right)^2=0$. Prin urmare avem $a=1$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{3}$.

Observăm că $a^2+b^2=1+2=3=c^2$, de unde urmează că triunghiul cu laturile de lungimile a, b și c este dreptunghic.

10.3. Fie ABC un triunghi, iar P un punct care aparține interiorului acestui triunghi. Pe laturile AC și BC se consideră punctele D și E, respectiv, astfel încât $\angle DPC\equiv\angle ABC$ și $\angle EPC\equiv\angle BAC$. Arătați că $AD\cdot CE=BE\cdot CD$.

Rezolvare. Avem $\angle AFC>\angle ABC$ (ca unghi exterior $\triangle CFB$), deci $\angle AFC>\angle DPC$. Prin urmare, punctul D este situat mai sus de paralela dusă prin P la dreapta AB.



În mod analog, punctul E este situat mai sus de paralela dusă prin P la dreapta AB. Prin urmare, punctul P este situat în exteriorul $\triangle CDE$ și patrulaterul $CDPE$ este convex.

Din triunghiul ABC avem:

$$m(\angle DCE)=180^\circ-\left(m(\angle ABC)+m(\angle BAC)\right)=$$
$$=180^\circ-\left(m(\angle DPC)+m(\angle EPC)\right)=180^\circ-m(\angle DPE)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow m(\angle DCE)+m(\angle DPE)=180^\circ.$$

Deoarece în patrulaterul convex $CDPE$ două unghiuri opuse sunt suplimentare, el este inscriptibil, prin urmare $\angle CED\equiv\angle DPC\equiv\angle ABC$.

Unghiurile DEC și ABC sunt unghiuri corespondente formate de dreptele AB și DE cu secanta BC. Fiindcă aceste unghiuri sunt congruente, urmează că dreptele AB și DE sunt paralele.

Din teorema lui Thales pentru triunghiul ABC, avem $\dfrac{CD}{AD}=\dfrac{CE}{BE}\Leftrightarrow AD\cdot CE=BE\cdot CD.$

10.4. Se consideră mulțimea $M=\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid ax+by=1\}$, unde a și b sunt numere reale date. Determinați valoarea maximă a expresiei $E(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$, dacă $(x,y)\in M$.

Rezolvare. Vom arăta că valoarea maximă a expresiei $E(x,y)$ este a^2+b^2.

Avem $ax+by=1$.

1. Fie $b=0\Rightarrow a\neq 0\Rightarrow x=\dfrac{1}{a},\ y\in\mathbb{R}\Rightarrow E(x,y)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{a^2}+y^2}\leq\dfrac{1}{\dfrac{1}{a^2}}=a^2=a^2+b^2.$

   Deci valoarea maximă a expresiei $E(x,y)$ este egală cu a^2+b^2 și se atinge pentru $x=\dfrac{1}{a}, y=0$.

2. Fie $b\in\mathbb{R}^*$, atunci $y=\dfrac{1}{b}-\dfrac{a}{b}\cdot x$.

Pentru a determina valoarea maximă a expresiei $E(x,y)$, vom determina valoarea minimă a expresiei x^2+y^2.

$$x^2+y^2=x^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{a}{b}\cdot x\right)^2=\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot x^2-\frac{2a}{b^2}\cdot x+\frac{1}{b^2}.$$

Considerăm funcția de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\left(1+\dfrac{a^2}{b^2}\right)\cdot x^2-\dfrac{2a}{b^2}\cdot x+\dfrac{1}{b^2}$.

Deoarece $1+\dfrac{a^2}{b^2}>0$, funcția f are un minim egal cu $\dfrac{-\Delta}{4\left(1+\dfrac{a^2}{b^2}\right)}=-\dfrac{\dfrac{4a^2}{b^4}-\dfrac{4}{b^2}-\dfrac{4a^2}{b^4}}{4\left(1+\dfrac{a^2}{b^2}\right)}=\dfrac{1}{a^2+b^2}$.

Răspuns: Valoarea maximă a expresiei $E(x,y)$ este a^2+b^2.

10.5. Determinați toate valorile parametrului real a pentru care ecuația $3x^4+11ax+2a^2=0$ are cel puțin o soluție număr întreg.

Rezolvare.

1. Fie $a=0$, atunci $x=0$ este soluție întreagă a ecuației. Observăm că 0 este soluție doar pentru $a=0$.

2. Fie $a\in\mathbb{R}^*\Rightarrow x\neq 0$. Atunci $3x^4+11ax+2a^2=0\Leftrightarrow 2a^2+11xa+3x^4=0$.

   În ultima ecuație vom considera a necunoscută, iar x – parametru.

   Calculăm $\Delta=121x^2-24x^4=x^2\left(121-24x^2\right)\Rightarrow\Delta\geq 0\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}121-24x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\leq\dfrac{121}{24}$.

   Pentru $a\in\mathbb{R}^*$ soluțiile întregi nenule ale ecuației date pot fi doar numerele $\pm1,\pm2$.

   2.1. Dacă $x=1$, obținem ecuația $2a^2+11a+3=0\Leftrightarrow a=\dfrac{-11\pm\sqrt{97}}{4}$.

   2.2. Dacă $x=-1$, obținem ecuația $2a^2-11a+3=0\Leftrightarrow a=\dfrac{11\pm\sqrt{97}}{4}$.

   2.3. Dacă $x=2$, obținem ecuația $a^2+11a+24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-3\\a=-8\end{array}\right.$.

   2.3. Dacă $x=-2$, obținem ecuația $a^2-11a+24=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=3\\a=8\end{array}\right.$.

Răspuns: $a\in\left\{0;\ \pm3;\pm8;\dfrac{-11\pm\sqrt{97}}{4};\dfrac{11\pm\sqrt{97}}{4}\right\}$.