ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

районный/муниципальный тур, 07 февраля 2026 г., XII класс

12.1. Дана функция $f:[1;4] \to \mathbb{R}, f(x) = \ln\left(1+\sqrt{x}\right)$. Найдите числовое значение площади подграфика функции f.

12.2. В треугольной пирамиде $VABC$ высота VO проходит через точку O - центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Известно, что $m(\angle VAC) = 60°$, $m(\angle VCA) = 45°$, а площади треугольников AOB и ABC относятся как $1:\left(2+\sqrt{3}\right)$. Найдите величину угла BVC.

12.3. Даны ненулевые комплексные числа z_1, z_2 такие, что $|z_1| = |z_2| = |z_1 + z_2|$.

Вычислите значение выражения $A = \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2026} + \left(\frac{z_2}{z_1}\right)^{2026}$.

12.4. Найдите матрицу A второго порядка с действительными элементами такую, что

$$A^3 - 6A^2 + 12\,A = \begin{pmatrix} -19 & 0 \\ 81 & -19 \end{pmatrix}.$$

12.5. Пусть

$$I_n = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{1+x^2}{1+x^4} \operatorname{arctg} x \, dx, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Вычислите $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$.

Время работы: 240 минут.

Правильное решение любой задачи оценивается в 7 баллов.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!