

Olimpiada la matematică

etapa raională/municipală, 7 februarie 2026, Clasa a VII-a

Soluții.

7.1. (a) Determinați toate perechile de numere reale pozitive (u, v) astfel încât

$$\begin{cases} u = 3v \\ 12u - v^2 = 324 \end{cases}$$

(b) Determinați toate perechile de numere întregi pozitive (p, q) astfel încât

$$\begin{cases} p = 3q \\ (75p)^q = q^p \end{cases}$$

Soluție. (a) Înlocuim $3v$ în a doua ecuație în loc de variabila u și obținem $36v = v^2 + 324$. Observăm că $324 = 18^2$ și că expresia noastră poate fi scrisă ca

$$v^2 - 36v + 324 = v^2 - 2 \cdot v \cdot 18 + 18^2 = (v - 18)^2 = 0.$$

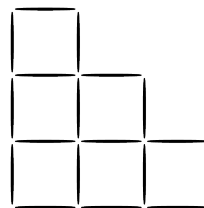
Obținem soluția unică $v = 18$ și $u = 6$. Răspuns: $(u, v) = (6, 18)$.

(b) Înlocuim $3q$ în a doua ecuație în loc de variabila p și obținem

$$(75 \cdot 3q)^q = q^{3q} = (q^3)^q.$$

Folosind proprietățile operațiilor cu puteri, deducem egalitatea: $225q = q^3$. Deoarece q este un număr pozitiv, putem împărți la stânga și la dreapta la q și obținem $225 = q^2$. Prin urmare, $q = 15$ și $p = 45$. Răspuns: $(p, q) = (15, 45)$.

7.2. Eva a realizat o scară cu 3 trepte folosind 18 chibrituri, așa cum se arată în imagine. De câte chibrituri are nevoie pentru a face o scară cu 150 de trepte?



Soluție. Observăm că o scară cu 3 trepte este formată din $1 + 2 + 3 + 3$ chibrituri orizontale și $1 + 2 + 3 + 3$ chibrituri verticale. Pentru o scară cu 150 de trepte, vom avea nevoie de $1 + 2 + \dots + 150 + 150$ chibrituri orizontale și același număr de verticale. În total vom avea nevoie de $2(1 + 2 + 3 + \dots + 150 + 150)$ chibrituri. Observăm că

$$2(1 + 2 + 3 + \dots + 150) = (1 + 150) + (2 + 149) + \dots + (150 + 1) = 151 \cdot 150 = 22650.$$

Numărul de chibrituri necesare este $22650 + 300 = 22950$.

7.3. La o serată, un magician îi cere unui participant să se gândească la un număr de trei cifre $\overline{abc}$, unde a , b și c sunt cifre diferite de zero în sistemul zecimal, în această ordine. Apoi magicianul îi cere acestui participant să formeze numerele $\overline{bca}$ și $\overline{cab}$, și să spună suma lor: $N = \overline{bca} + \overline{cab}$. Dacă i se spune valoarea lui N , magicianul poate ghici numărul inițial $\overline{abc}$. Imaginează-ți că ești magician și determină, cu explicație, numărul $\overline{abc}$, dacă $N = 1074$.

Soluție. Observăm că însumarea după valoarea pozițională (unități, zeci, sute) $\overline{bca} + \overline{cab}$, obținem că $a + b$, $a + c$ și $b + c$ pot avea numai valori:

$$\begin{array}{r} + \quad b \quad c \quad a \\ \quad c \quad a \quad b \\ \hline 1 \quad 0 \quad 7 \quad 4 \end{array}$$

$$b + c = \{9, 10\}, \quad a + c = \{6, 7, 16, 17\}, \quad a + b = \{4, 14\}.$$

Să analizăm toate cazurile posibile:

- $b + c = 9$ și $a + b = 4$, atunci $a + c = 17$. Soluție: $(a, b, c) = (6, -2, 11)$, care nu convine.
- $b + c = 9$ și $a + b = 14$, atunci $a + c = 16$. Nu există soluție în numere întregi.
- $b + c = 10$ și $a + b = 4$, atunci $a + c = 7$. Nu există soluție în numere întregi.
- $b + c = 10$ și $a + b = 14$, atunci $a + c = 6$. Soluție: $(a, b, c) = (5, 9, 1)$.

Deci, numărul pe care magicianul trebuie să-l ghicească este 591.

Soluție alternativă. Adunăm numerele $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ și $\overline{cab}$ pentru a obține

$$\overline{abc} + 1074 = 111(a + b + c).$$

Numărul necunoscut $\overline{abc}$ plus 1074 trebuie să fie divizibil cu 111. În plus,

$$1174 = 100 + 1074 \leq \overline{abc} + 1074 \leq 999 + 1074 = 2073.$$

Astfel, $\overline{abc} + 1074 = 111 \times \{11, 12, \dots, 18\}$ și există 8 valori posibile pentru $\overline{abc}$:

$$147, 258, 369, 480, 591, 702, 813, 924.$$

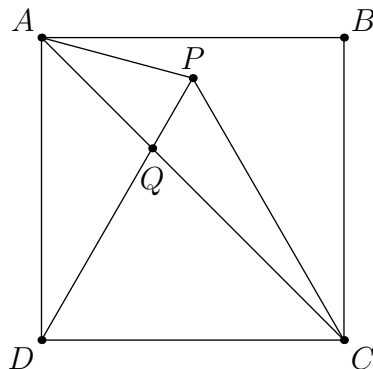
Verificând fiecare dintre ele, constatăm că numărul dorit este 591.

Comentariu. Magicianul poate ghici întotdeauna numărul spectatorului, iar răspunsul va fi întotdeauna unic (lipsit de ambiguitate). Deoarece $\overline{abc} + N$ este divizibil cu 111, magicianul știe restul $\overline{abc}$ la împărțirea la 111. De asemenea, folosind regula divizibilității la 9, numerele $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ și $\overline{cab}$ au aceeași sumă de cifre și, prin urmare, același rest r la împărțirea la 9. Știind că $N = \overline{bca} + \overline{cab}$ lasă un rest $2r$ la împărțirea la 9, magicianul poate calcula restul r la împărțirea la $\overline{abc}$. Astfel, folosind Teorema Chinezească a Resturilor, el poate calcula restul rămas la împărțirea lui $\overline{abc}$ la 999 și, prin urmare, poate executa întotdeauna cu succes acest truc.

În particular, 1074 are același rest ca $1 + 0 + 7 + 4 = 12$ când este împărțit la 9, care este egal cu $2r$. Prin urmare, $\overline{abc}$ din această problemă are un rest de $r = 6$ când este împărțit la 9. Știind că $\overline{abc}$ lasă un rest de 6 când este împărțit la 9 și un rest de 36 când este împărțit la 111, vedem că singurul răspuns posibil este 591.

7.4. Fie dat un pătrat $ABCD$. În interiorul pătratului se ia un punct P , astfel încât triunghiul CPD să fie echilateral. Fie Q punctul de intersecție a segmentelor AC și PD . Demonstrați că triunghiul APQ este isoscel.

Soluție. Să reprezentăm printr-un desen condițiile problemei:



Triunghiul CPD este echilateral și $m(\angle PDC) = m(\angle PCD) = m(\angle CPD) = 60^\circ$. Triunghiul ACD este isoscel: $AD = CD$ și $m(\angle ADC) = 90^\circ$, $m(\angle DAC) = m(\angle ACD) = 45^\circ$. Obținem

$$m(\angle ADP) = m(\angle ADC) - m(\angle PDC) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Deoarece $m(\angle DAC) = 45^\circ$ și $m(\angle ADP) = 30^\circ$, obținem că

$$m(\angle AQD) = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ \quad \text{și} \quad m(\angle AQP) = 180^\circ - m(\angle AQD) = 75^\circ.$$

Observăm că triunghiul APD este isoscel, deoarece $AD = PD$. Fie x măsura unghiurilor congruente de la baza triunghiului: $m(\angle DAP) = m(\angle APD) = x$. Suma măsurilor unghiurilor din triunghiul ADP este 180° , ceea ce înseamnă că

$$m(\angle DAP) + m(\angle APD) + m(\angle ADP) = 2x + 30^\circ = 180^\circ.$$

Prin urmare, $x = 75^\circ$. Înseamnă că $m(\angle APQ) = m(\angle AQP) = 75^\circ$, deci triunghiul APQ este isoscel cu laturile congruente $AP = AQ$.

7.5. Un număr întreg pozitiv se numește *interesant*, dacă este produsul a exact două numere prime, nu neapărat distincte. De exemplu, $9 = 3 \cdot 3$ și $10 = 2 \cdot 5$ sunt două numere interesante consecutive. Care este cel mai mare număr posibil de numere interesante consecutive? Argumentați răspunsul.

Soluție. Observăm că pot exista trei numere interesante consecutive, de exemplu:

$$33, 34, 35 \quad \text{sau} \quad 85, 86, 87.$$

Vom demonstra că acesta este numărul maxim posibil de numere interesante consecutive. Să presupunem că există patru numere interesante consecutive. Atunci unul dintre ele trebuie să fie divizibil cu 4. Acestea nu pot fi printre numerele 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Atunci numărul nostru divizibil cu 4 poate fi scris ca produs: 2 înmulțit cu 2 și înmulțit cu încă un număr mai mare decât 1. Aceasta înseamnă că nu poate fi interesant. Prin urmare, nu există patru numere interesante consecutive.