Олимпиада по математике

районный/муниципальный тур, 7 февраля 2026 года, VII класс

Решения.

7.1. (а) Найдите все пары положительных действительных чисел (u, v), такие что

$$\begin{cases} u = 3v \\ 12u - v^2 = 324 \end{cases}$$

(б) Найдите все пары положительных целых чисел (p, q), такие что

$$\begin{cases} p = 3q \\ (75p)^q = q^p \end{cases}$$

Решение. (а) Подставим во второе уравнение вместо переменной u, выражение $3v$ и получим $36v = v^2 + 324$. Заметим что $324 = 18^2$ и что наше выражение можно записать как записать как

$$v^2 - 36v + 324 = v^2 - 2 \cdot v \cdot 18 + 18^2 = (v - 18)^2 = 0.$$

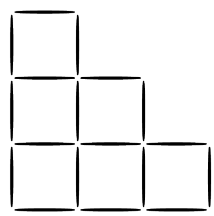
Получаем единственное решение $v = 18$ и $u = 6$. Ответ: $(u, v) = (6, 18)$.

(б) Подставим во второе уравнение вместо переменной p, выражение $3q$ и получим

$$(75 \cdot 3q)^q = q^{3q} = (q^3)^q.$$

Используя правила операций со степенями, получаем что основания двух равных выражений с равными степенями q должны быть равны: $225q = q^3$. Так как q положительное число, имеем право поделить слева и справа на q и получим $225 = q^2$. Следовательно, $q = 15$ и $p = 45$. Ответ: $(p, q) = (15, 45)$.

7.2. Ева сделала лестницу из 3 ступеней, используя 18 спичек, как показано на рисунке. Сколько ей нужно спичек, чтобы сделать лестницу из 150 ступеней?



Решение. Заметим, что лестница из 3 ступенек состоит из $1+2+3+3$ горизонтальных спичек и $1 + 2 + 3 + 3$ вертикальных спичек. Для лестницы из 150 ступеней нам понадобятся $1+2+\cdots+150+150$ горизонтальных спичек и столько же вертикальных. Всего нужно будет $2\,(1 + 2 + 3 + \cdots + 150 + 150)$ спичек. Заметим, что

$$2(1 + 2 + 3 + \cdots + 150) = (1 + 150) + (2 + 149) + \cdots + (150 + 1) = 151 \cdot 150 = 22650.$$

Количество нужных спичек равно $22650 + 300 = 22650 + 300 = 22950$.

7.3. На праздничном мероприятии фокусник просит одного из участников задумать трёхзначное число $\overline{abc}$, где a, b, c — ненулевые цифры в десятичной системе исчисления в указанном порядке. Затем фокусник просит этого участника составить числа $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$, и назвать их сумму: $N = \overline{bca} + \overline{cab}$. Если ему сообщат значение N, фокусник может угадать исходное число $\overline{abc}$. Выступите в роли фокусника и найдите с обьяснением значение $\overline{abc}$, если $N = 1074$.

Решение. Заметим, что суммируя по разрядам (единицы, десятки, сотни) сумму чисел $\overline{bca} + \overline{cab}$ получаем, что у $a + b$, $a + c$ и $b + c$ могут быть только значения:

$$\begin{array}{cccc} & b & c & a \\ + & c & a & b \\ \hline 1 & 0 & 7 & 4 \end{array}$$

$$b + c = \{9, 10\}, \quad a + c = \{6, 7, 16, 17\}, \quad a + b = \{4, 14\}.$$

Разберём все возможные случаи:

- $b + c = 9$ и $a + b = 4$, тогда $a + c = 17$. Решение: $(a, b, c) = (6, -2, 11)$ не подходит.
- $b + c = 9$ и $a + b = 14$, тогда $a + c = 16$. Решения в целых числах нет.
- $b + c = 10$ и $a + b = 4$, тогда $a + c = 7$. Решения в целых числах нет.
- $b + c = 10$ и $a + b = 14$, тогда $a + c = 6$. Решение: $(a, b, c) = (5, 9, 1)$.

Значит число, которое должен угадать фокусник, равно 591.

Альтернативное решение. Сложим числа $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ и $\overline{cab}$, чтобы получить

$$\overline{abc} + 1074 = 111(a + b + c).$$

Неизвестное для фокусника число $\overline{abc}$ плюс 1074 должно делиться на 111. Кроме того,

$$1174 = 100 + 1074 \le \overline{abc} + 1074 \le 999 + 1074 = 2073.$$

Таким образом, $\overline{abc}+1074 = 111\times\{11, 12, \dots, 18\}$ и существует 8 возможных значений для $\overline{abc}$:

$$147,\ 258,\ 369,\ 480,\ 591,\ 702,\ 813,\ 924.$$

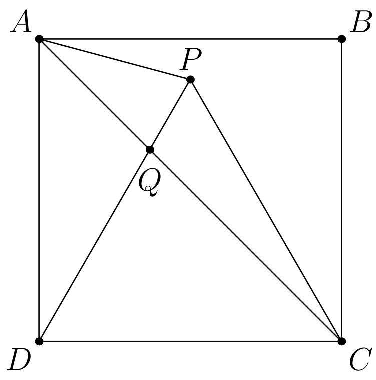
Проверив каждое из них, получаем что задуманое число — 591.

Комментарий. Фокусник всегда может угадать число зрителя, и ответ всегда будет однозначным. Из того, что $\overline{abc}+N$ делится на 111, фокусник знает остаток, который $\overline{abc}$ оставляет при делении на 111. Также, используя правило делимости на 9, числа $\overline{abc}$, $\overline{bca}$, $\overline{cab}$ имеют одинаковую сумму цифр и, следовательно, одинаковый остаток r при делении на 9. Зная, что $N = \overline{bca} + \overline{cab}$ оставляет остаток $2r$ при делении на 9, фокусник может вычислить остаток r, который $\overline{abc}$ оставляет при делении на 9. Таким образом, используя Китайскую теорему об остатках, он может вычислить остаток, который остается от деления $\overline{abc}$ на 999, и, следовательно, всегда успешно выполнять этот фокус.

В частности, 1074 имеет тот же остаток, что и $1 + 0 + 7 + 4 = 12$ при делении на 9, который также равен $2r$. Следовательно, $\overline{abc}$ из данной задачи имеет остаток $r = 6$ при делении на 9. Зная, что $\overline{abc}$ дает остаток 6 при делении на 9 и остаток 36 при делении на 111, получаем, что единственно возможный ответ — 591.

7.4. Дан квадрат $ABCD$. Внутри квадрата берется точка P таким образом, что треугольник CPD равносторонний. Пусть Q будет точкой пересечения отрезков AC и PD. Докажите, что треугольник APQ является равнобедренным.

Решение. Нарисуем рисунок задачи:



Треугольник CPD равносторонний и $\angle PDC = \angle PCD = \angle CPD = 60°$. Треугольник ACD равнобедренный: $AD = CD$ и $\angle ADC = 90°$, $\angle DAC = \angle ACD = 45°$. Получаем

$$\angle ADP = \angle ADC - \angle PDC = 90° - 60° = 30°.$$

Из того, что $\angle DAC = 45°$ и $\angle ADP = 30°$ получаем, что

$$\angle AQD = 180° - 45° - 30° = 105° \quad \text{и} \quad \angle AQP = 180° - \angle AQD = 75°.$$

Заметим, что треугольник APD равнобедренный, так как $AD = PD$. Обозначим через x равные углы при основании треугольника: $\angle DAP = \angle APD = x$. Сумма углов в треугольнике ADP равна $180°$, получаем:

$$\angle DAP + \angle APD + \angle ADP = 2x + 30° = 180°.$$

Следовательно, $x = 75°$. Углы $\angle APQ = \angle AQP = 75°$ равны, а значит треугольник APQ равнобедренный с равными сторонами $AP = AQ$.

7.5. Положительное целое число назовем *интересным*, если оно является произведением ровно двух, необязательно различных, простых чисел. Например, $9 = 3 \cdot 3$ и $10 = 2 \cdot 5$ – это два последовательных интересных числа. Каково может быть наибольшее количество последовательных интересных чисел? Обоснуйте ответ.

Решение. Заметим, что могут быть три подряд интересных числа, например:

$$33,\ 34,\ 35 \quad \text{или} \quad 85,\ 86,\ 87.$$

Мы покажем, что это максимально возможное число последовательных интересных чисел. Допустим, что существуют четыре подряд идущих интересных числа. Тогда одно из них должно делиться на 4. Их не может быть среди чисел $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Тогда наше число делящееся на 4, можно записать как произведение: 2 умножить на 2 и умножить еще на одно число больше 1. А значит он не может быть интересным. Следовательно не существуют четыре подряд идущих интересных числа.