OLIMPIADA LA MATEMATICĂ
Etapa raională/municipală, 7 februarie 2026, Clasa a IX–a

SOLUȚII

9.1. Fie a, b și c trei numere reale, astfel încât graficul funcției $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^2 + 2(a+b+c)x + a^2 + b^2 + c^2$ are cel puțin un punct comun cu axa absciselor. Determinați valoarea minimă a sumei $S = (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2$.

Soluție.

Calculăm

$$\Delta' = \frac{\Delta}{4} = (a+b+c)^2 - 3(a^2+b^2+c^2) = -2a^2 - 2b^2 - 2c^2 + 2ab + 2bc + 2ca.$$

Putem scrie $\Delta' = -(a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2$. Observăm că $\Delta' \leq 0$, dar deoarece graficul funcției are cel puțin un punct comun cu axa absciselor, rezultă că

$$\Delta' = 0 \iff a = b = c = t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Obținem

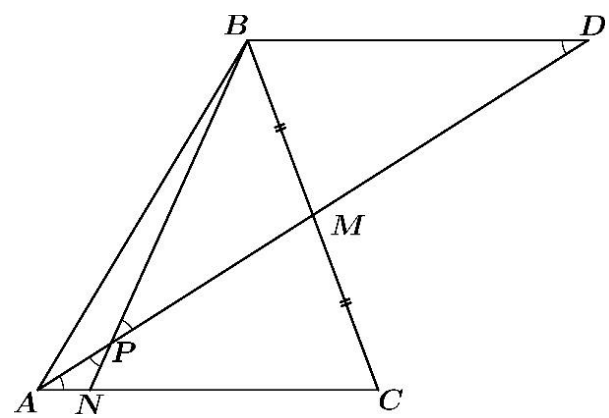
$$S = (t-1)^2 + (t-2)^2 + (t-3)^2 = 3t^2 - 12t + 14 = 3(t-2)^2 + 2 \geq 2$$

Pentru $t = 2$, obținem cea mai mică valoare a sumei $S = 2$.

Răspuns: $S = 2$.

9.2. Fie AM – mediana unui triunghi ABC, iar N – un punct al laturii AC. Segmentul BN intersectează mediana AM în punctul P, astfel încât $[BP] \equiv [AC]$. Demonstrați că $[AN] \equiv [NP]$.

Soluție.



Prin punctul B ducem o paralelă la AC, care intersectează dreapta AM într-un punct D.

Atunci $\measuredangle DBM \equiv \measuredangle ACM$, $\measuredangle BDM \equiv \measuredangle CAM$.

Mai avem că $[BM] \equiv [CM] \xRightarrow{(ULU)} \Delta ACM \equiv \Delta DBM$.

Din congruența acestor triunghiuri rezultă că $[BD] \equiv [AC]$, dar $[AC] \equiv [BP]$, atunci triunghiul BDP este isoscel, deci $\measuredangle BDP \equiv \measuredangle BPD$.

Unghiurile BPD și APN sunt opuse la vârf, deci sunt congruente.

Observăm că triunghiul APN are două unghiuri congruente, deci este isoscel cu baza AP, atunci $[AN] = [NP]$. c.c.t.d

9.3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{2}{x^2-x+2} + \ldots + \frac{2026}{x^2-x+2026} = 2026$.

Soluție.

Notăm $x^2 - x + 1 = t$. Observăm că $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow t > 0$.

Ecuația inițială devine $\frac{1}{t}+\frac{2}{t+1}+...+\frac{2026}{t+2025}=2026$.

Putem scrie $\frac{(1-t)+t}{t}+\frac{(1-t)+(t+1)}{t+1}+...+\frac{(1-t)+(t+2025)}{t+2025}=2026 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+\frac{1-t}{t}+1+\frac{1-t}{t+1}+...+1+\frac{1-t}{t+2025}=2026 \Leftrightarrow \frac{1-t}{t}+\frac{1-t}{t+1}+...+\frac{1-t}{t+2025}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1-t)\cdot\left[\frac{1}{t}+\frac{1}{t+1}+...+\frac{1}{t+2025}\right]=0 \overset{t>0}{\Leftrightarrow} t=1$.

Revenim la notație $x^2-x+1=1 \Leftrightarrow x^2-x=0 \Leftrightarrow x\in\{0;1\}$.

Răspuns: $S=\{0;1\}$

9.4. La examenul de matematică, 666 de elevi au comis în total 2000 de greșeli. Este posibil ca numărul elevilor care au comis 6 sau mai multe greșeli să fie mai mare decât numărul elevilor care au comis 3 sau mai puține greșeli? Argumentați.

Soluție.

Fie x – numărul elevilor care au comis 3 sau mai puține greșeli; y – numărul elevilor care au comis 4 sau 5 greșeli; iar z – numărul elevilor care au comis 6 sau mai multe greșeli. Atunci

$$x+y+z=666.$$

Presupunem că $z>x$, adică ipoteza problemei este corectă. Atunci

$$z=x+t, \qquad t\geq 1.$$

Atunci sunt adevărate următoarele afirmații:

1. Elevii, care au comis 6 sau mai multe greșeli, în total au comis $M_1\geq 6z$ greșeli.
2. Elevii, care au comis 4 sau 5 greșeli, în total au comis $M_2>3y$ greșeli.
3. Elevii, care au comis 3 sau mai puține greșeli, în total au comis $M_3\geq 0$ greșeli.

Deoarece în total elevii au comis 2000 de greșeli, atunci

$$2000=M_1+M_2+M_3>6z+3y+0\cdot z=3z+3y+3z=$$
$$=3z+3y+3x+3t=3\cdot(x+y+z)+3t=3\cdot 666+3t=$$
$$=1998+3t.$$

Prin urmare obținem că

$$1998+3t<2000$$
$$3t<2 \;\Rightarrow\; t<\tfrac{2}{3}.$$

Dar $t\geq 1$, și obținem o contradicție. Deci răspunsul problemei este negativ.

9.5. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $ax+3=|x+4|$ pentru toate valorile parametrului real a.

Soluție.

Metoda 1.

Deoarece $|x+4|\geq 0, (\forall)x\in\mathbb{R}$, atunci

$$ax+3\geq 0. \qquad (1)$$

Ridicăm la pătrat ambele părți ale ecuației:

$$(ax+3)^2=(x+4)^2$$
$$a^2x^2+6ax+9=x^2+8x+16$$
$$(a^2-1)\cdot x^2+(6a-8)\cdot x-7=0 \qquad (2)$$
Pentru $a^2-1\neq 0$, calculăm
$$\Delta=(6a-8)^2-4\cdot(a^2-1)\cdot(-7)=64a^2-96a+36=(8a-6)^2$$
$$\sqrt{\Delta}=|8a-6|$$
$$x_{1,2}=\frac{(8-6a)\pm|8a-6|}{2(a^2-1)}=\frac{(4-3a)\pm(4a-3)}{(a^2-1)}=\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{a-1}\\ \dfrac{-7}{a+1}\end{array}\right., \quad a\neq\pm1$$
Cercetăm cazurile $a=1$ și $a=-1$.

Fie $a=1$.

Atunci ecuația (2) ia forma
$$x\cdot(-2)-7=0 \quad \Rightarrow \quad x_0=-3{,}5.$$
Verificăm dacă este adevărată inegalitatea (1):
$$ax_0+3=1\cdot(-3{,}5)+3=-0{,}5<0.$$
Deci, pentru $a=1$, ecuația nu are soluții reale.

Fie $a=-1$.

Atunci ecuația (2) ia forma
$$x\cdot(-14)-7=0 \quad \Rightarrow \quad x_0=-0{,}5$$
Verificăm dacă este adevărată inegalitatea (1):
$$ax_0+3=(-1)\cdot(-3{,}5)+3=3{,}5>0$$
Deci, pentru $a=-1$ există o soluție reală $x_0=-0{,}5$.

Pentru $a\neq\pm1$, ecuația (2) are 2 soluții reale:
$$\left[\begin{array}{l}x_1=\dfrac{1}{a-1}\\ x_2=\dfrac{-7}{a+1}\end{array}\right.$$
Verificăm dacă este adevărată inegalitatea (1):
$$ax_1+3\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\cdot\frac{1}{a-1}\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4a-3}{a-1}\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\in(-\infty;\frac{3}{4}]\cup(1;+\infty)$$
$$ax_2+3\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\cdot\left(\frac{-7}{a+1}\right)\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3-4a}{a+1}\geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a\in(-1;\frac{3}{4}].$$
Prin urmare răspunsul are următoarea formă:

Răspuns: Pentru $a\in\left(\frac{3}{4};1\right]$, $S=\varnothing$;

Pentru $a\in(-\infty;-1]\cup\left\{\frac{3}{4}\right\}\cup(1;+\infty)$, $S=\{x_1\}=\left\{\frac{1}{a-1}\right\}$;

Pentru $a\in\left(-1;\frac{3}{4}\right)$, $S=\{x_1;x_2\}=\left\{\frac{-7}{a+1};\frac{1}{a-1}\right\}$.

Metoda 2. Ecuația este echivalentă cu totalitatea:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}ax+3=-x-4,\\ x<-4,\end{cases}\\ \begin{cases}ax+3=x+4,\\ x\geq -4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(a+1)x=-7,\\ x<-4,\end{cases}\\ \begin{cases}(a-1)x=1,\\ x\geq -4.\end{cases}\end{array}\right.$$

1. Dacă $a=-1$, atunci ultima totalitate are soluția $x=-0{,}5$.

2. Dacă $a=1$, atunci ultima totalitate nu are soluții reale.

3. Fie $a\neq\pm1$, atunci obținem $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\frac{-7}{a+1},\\ x<-4,\end{cases}\\ \begin{cases}x=\frac{1}{a-1},\\ x\geq -4.\end{cases}\end{array}\right.$

3.1. Fie $\begin{cases}\frac{-7}{a+1}\geq -4,\\ \frac{1}{a-1}<-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{4a-3}{a+1}\geq 0,\\ \frac{4a-3}{a-1}<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\in(-\infty;-1)\cup\left[\frac{3}{4};+\infty\right),\\ a\in\left(\frac{3}{4};1\right)\end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(\frac{3}{4};1\right)$, atunci ecuația dată nu are soluții reale.

3.2. Fie $\begin{cases}\frac{-7}{a+1}<-4,\\ \frac{1}{a-1}\geq -4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\in\left(-1;\frac{3}{4}\right),\\ a\in\left(-\infty;\frac{3}{4}\right]\cup(1;+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(-1;\frac{3}{4}\right)$, atunci ecuația dată are două soluții reale $\frac{-7}{a+1}$ și $\frac{1}{a-1}$.

3.3. Fie $\begin{cases}\frac{-7}{a+1}<-4,\\ \frac{1}{a-1}<-4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\in\left(-1;\frac{3}{4}\right),\\ a\in\left(\frac{3}{4};1\right)\end{cases} \Leftrightarrow a\in\varnothing.$

3.4. Fie $\begin{cases}\frac{-7}{a+1}\geq -4,\\ \frac{1}{a-1}\geq -4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a\in(-\infty;-1)\cup\left[\frac{3}{4};+\infty\right),\\ a\in\left(-\infty;\frac{3}{4}\right]\cup(1;+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow a\in(-\infty;-1)\cup\left\{\frac{3}{4}\right\}\cup(1;+\infty)$, atunci ecuația are o singură soluție reală , $\frac{1}{a-1}$.

Răspuns: Pentru $a\in\left(\frac{3}{4};1\right]$, $S=\varnothing$;

Pentru $a\in(-\infty;-1]\cup\left\{\frac{3}{4}\right\}\cup(1;+\infty)$, $S=\left\{\frac{1}{a-1}\right\}$;

Pentru $a\in\left(-1;\frac{3}{4}\right)$, $S=\left\{\frac{-7}{a+1};\ \frac{1}{a-1}\right\}$.